Capitolul

3

DREAPTA IN GEOMETRIA DESCRIPTIVĂ

Termenul de “dreaptă” este alocat unei *linii drepte*, de lungime nedefinită, deci practic infinită şi care este cunoscută, sau definită, când se cunosc două puncte ale ei (cele două puncte definesc un *segment* de dreaptă). Notarea unei drepte se face cu literele “D” şi “Δ”, sau cu numele segmentului de definiție, cu bară deasupra: $\overline{D}$; $\overline{\Delta}$; $\overline{AB}$; $\overline{MN}$. Proiecțiile dreptei se realizează în acelaşi mod cu proiecțiile punctului, practic, prin proiecțiile a două puncte ale acelei drepte, deci a unui segment al dreptei. Dreapta “D” cu proiecțiile orizontală, verticală şi laterală (fig. 3.1), se va nota: $\overline{D}(\overline{d};\overline{d'};\overline{d''})$.

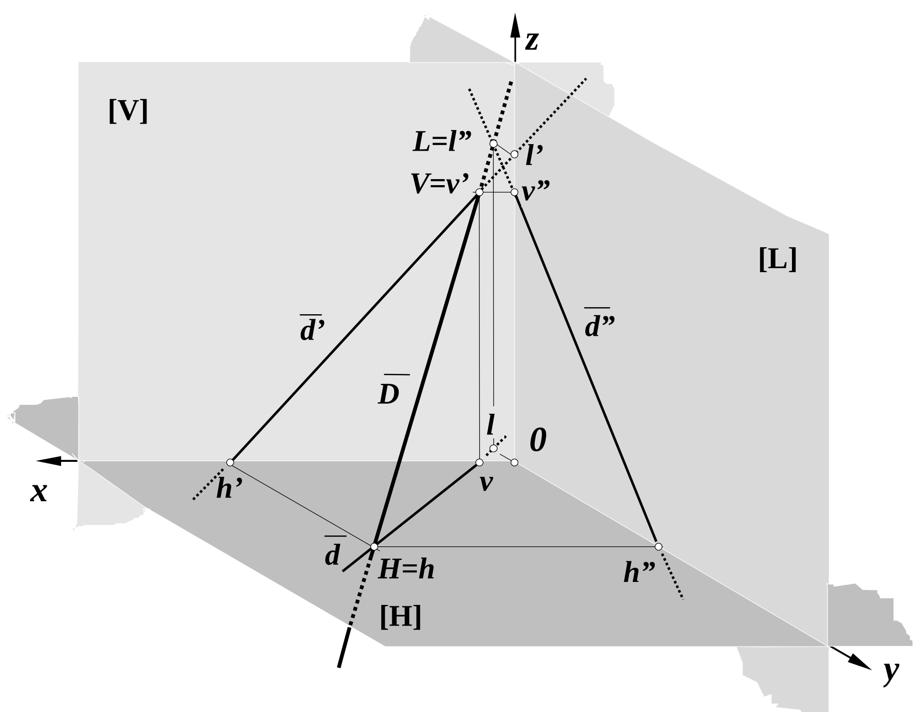


Fig. 3.1

Punctele în care dreapta intersectează planele de proiecție se numesc *urmele dreptei* şi sunt de fapt puncte definite la pozițiile particulare ale unui punct (§ 2.1.1):

$$\begin{aligned} \overline{D}\cap[H] = H; &\quad H(x;y;0) \\ \overline{D}\cap[V] = V; &\quad V(x;0;z); \\ \overline{D}\cap[L] = L; &\quad L(0;y;z); \end{aligned} \tag{3.1}$$

3.1 PUNCT APARȚINÂND UNEI DREPTE

Condiția ca un punct să aparțină unei drepte este ca proiecțiile sale să se găsească pe proiecțiile de acelaşi nume ale dreptei (fig. 3.2):

$$M \in \overline{D} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \overline{d}; \\ m' \in \overline{d'}; \\ m'' \in \overline{d''}; \end{cases} \tag{3.2}$$

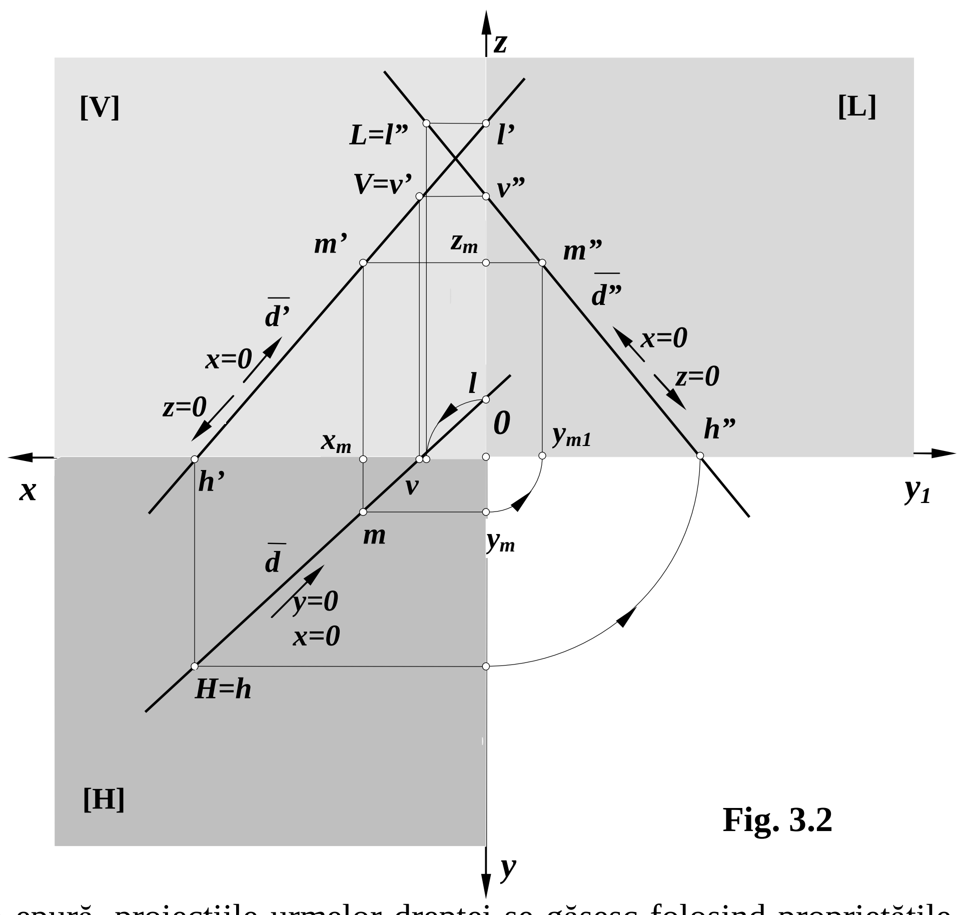


Fig. 3.2

In epură, proiecțiile urmelor dreptei se găsesc folosind proprietățile acestor puncte şi anume, punctul de $z = 0$, pentru ***H***¸ punctul de $y = 0$, pentru ***V***, respectiv punctul de $x = 0$, pentru ***L***.

3.2 POZIȚII PARTICULARE ALE DREPTEI

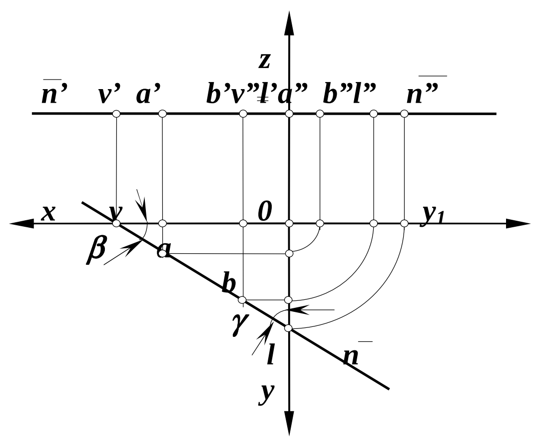
Aceste poziții se definesc în raport cu planele de proiecție şi se disting două categorii de drepte particulare:

- **drepte paralele cu un plan de proiecție;**
- **drepte perpendiculare pe un plan de proiecție.**

3.2.1 Dreapta paralelă cu planul orizontal [H], se numeşte *dreaptă orizontală* sau *de nivel* şi are toate punctele egal depărtate de planul [H]:

$$\overline{N}(\overline{n};\overline{n}';\overline{n}'')\parallel[H]\Leftrightarrow z=const.\Leftrightarrow\begin{cases}\overline{n}'\parallel\overline{0x};\\ \overline{n}''\parallel\overline{0y_1};\end{cases}\qquad(3.3)$$

Dreapta de nivel nu are urmă orizontală $\boldsymbol{H}$, se proiectează în adevărată mărime pe planul orizontal [H], proiecția sa orizontală $\overline{n}$ punând în evidență şi adevărata mărime a unghiurilor β şi γ făcute de dreaptă cu planele [V] şi [L] (fig. 3.3).



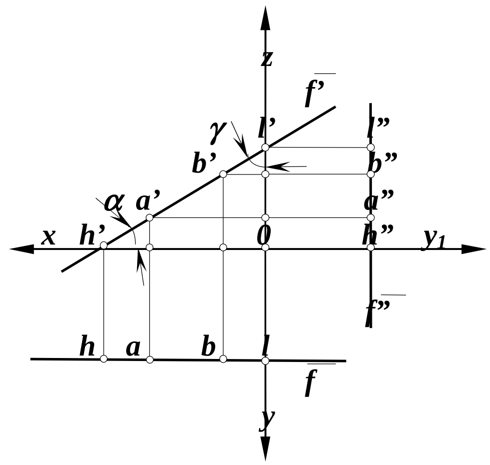
$$\begin{cases}\overline{ab}=\overline{AB}\\ \overline{n}'\parallel\overline{0x};\\ \overline{n}''\parallel\overline{0y_1};\\ \hat{\beta}=\ ad.\ \ mărime\\ \hat{\gamma}=\ ad.\ \ mărime\end{cases}$$

Fig. 3.3

3.2.2 Dreapta paralelă cu planul vertical [V], se numeşte *dreaptă de front* şi are toate punctele egal depărtate de planul [V]:

$$\overline{F}(\overline{f};\overline{f}';\overline{f}'')\parallel[V]\Leftrightarrow y=const.\Leftrightarrow\begin{cases}\overline{f}\parallel\overline{0x};\\ \overline{f}''\parallel\overline{0z};\end{cases}\qquad(3.4)$$

Dreapta de front nu are urmă verticală $\boldsymbol{V}$, se proiectează în adevărată mărime pe planul vertical [V], proiecția sa verticală $\overline{f}'$ evidențiind şi adevărata mărime a unghiurilor α şi γ făcute cu planele [H] şi [L] (fig. 3.4).



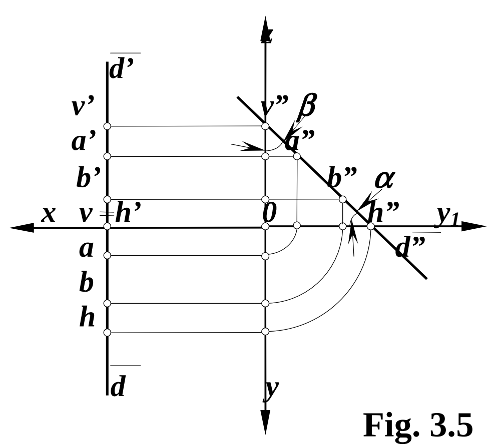
$$\begin{cases} \overline{a'b'} = \overline{AB} \\ \overline{f} \parallel \overline{0x}; \\ \overline{f''} \parallel \overline{0z}; \\ \hat{\alpha} = \text{ ad. mărime} \\ \hat{\gamma} = \text{ ad. mărime} \end{cases}$$

Fig. 3.4

3.2.3 Dreapta paralelă cu planul lateral [L], se numeşte *dreaptă de profil* şi are toate punctele egal depărtate de planul [L]:

$$\overline{D}(\overline{d};\overline{d'};\overline{d''}) \parallel [L] \Leftrightarrow x = const. \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{d'} \parallel \overline{0z}; \\ \overline{d} \parallel \overline{0y}; \end{cases} \qquad (3.5)$$

Dreapta de profil nu are urmă laterală ***L***, se proiectează în adevărată mărime pe planul lateral [L], proiecția sa laterală $\overline{d''}$ evidențiind şi adevărata mărime a unghiurilor β şi α făcute cu planele [V] şi [H] (fig. 3.5).



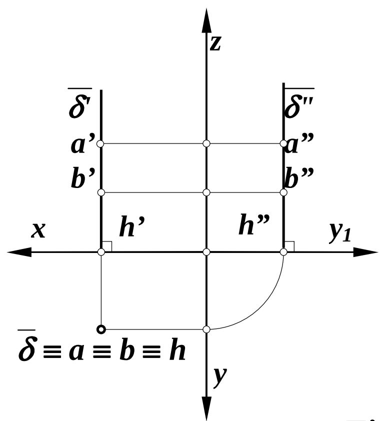
$$\begin{cases} \overline{a''b''} = \overline{AB} \\ \overline{d'} \parallel \overline{0z}; \\ \overline{d} \parallel \overline{0y}; \\ \hat{\beta} = \text{ ad. mărime} \\ \hat{\alpha} = \text{ ad. mărime} \end{cases}$$

Fig. 3.5

3.2.4 Dreapta perpendiculară pe planul orizontal [H], este simultan paralelă cu planele [V] şi [L], deci însumează proprietățile dreptelor de front şi de profil.

Această dreaptă se numeşte *dreaptă verticală* (are poziția normală a obiectelor, oamenilor, copacilor, pe Pământ), nu are decât urmă orizontală ***H*** şi se proiectează în adevărată mărime pe planele [V] şi [L], punând în evidență şi perpendicularitatea față de planul [H] (fig. 3.6):

$$\overline{\Delta}(\overline{\delta};\overline{\delta'};\overline{\delta''}) \perp [H] \Leftrightarrow \overline{\Delta} \parallel \{[V] \wedge [L]\} \Leftrightarrow \begin{cases} y = const \\ x = const. \end{cases} \qquad (3.6)$$



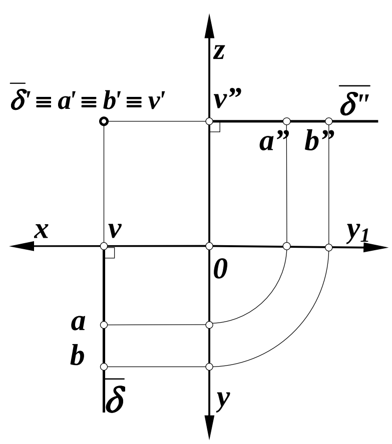
$$\begin{cases} \overline{a'b'}(\overline{\delta'}) \parallel \overline{0z} \parallel \overline{a''b''}(\overline{\delta''}) \\ \overline{a'b'} = \overline{a''b''} = \overline{AB} \\ \overline{a'b'}(\overline{\delta'}) \perp \overline{0x} \\ \overline{a''b''}(\overline{\delta''}) \perp \overline{0y_1} \\ \overline{\delta} \equiv a \equiv b \equiv h \equiv H \end{cases}$$

Fig. 3.6

3.2.5 Dreapta perpendiculară pe planul vertical [V], este simultan paralelă cu planele [H] şi [L], deci însumează proprietățile dreptelor de nivel şi de profil.

Această dreaptă se numeşte *dreaptă de capăt* (în proiecția verticală i se vede doar capătul), nu are decât urmă verticală ***V*** şi se proiectează în adevărată mărime pe planele [H] şi [L], punând în evidență şi perpendicularitatea față de planul [V] (fig. 3.7):

$$\overline{\Delta}(\overline{\delta};\overline{\delta'};\overline{\delta''}) \perp [V] \Leftrightarrow \overline{\Delta} \parallel \{[H] \wedge [L]\} \Leftrightarrow \begin{cases} z = const \\ x = const. \end{cases} \qquad (3.7)$$



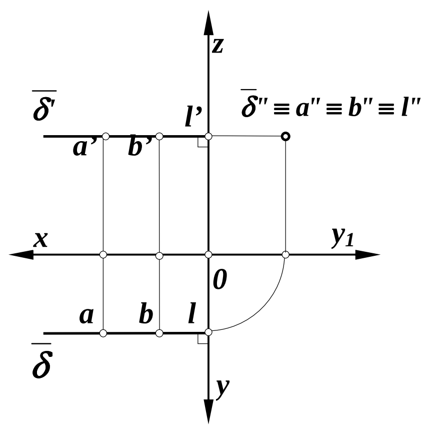
$$\begin{cases} \overline{ab}(\overline{\delta}) \parallel \overline{0y}\,; \quad \overline{a''b''}(\overline{\delta''}) \parallel \overline{0y_1} \\ \overline{ab} = \overline{a''b''} = \overline{AB} \\ \overline{ab}(\overline{\delta}) \perp \overline{0x} \\ \overline{a''b''}(\overline{\delta''}) \perp \overline{0z} \\ \overline{\delta'} \equiv a' \equiv b' \equiv v' \equiv V \end{cases}$$

Fig. 3.7

3.2.6 Dreapta perpendiculară pe planul lateral [L], este simultan paralelă cu planele [V] şi [H], deci cu axa $\overline{0x}$, însumând proprietăţile dreptelor de front şi de nivel.

Această dreaptă se numeşte *dreaptă fronto-orizontală*, nu are decât urmă laterală ***L*** şi se proiectează în adevărată mărime pe planele [V] şi [H], punând în evidenţă paralelismul cu axa $\overline{0x}$ şi perpendicularitatea faţă de planul [L] (fig. 3.8):

$$\overline{\Delta}(\overline{\delta};\overline{\delta'};\overline{\delta''}) \perp [L] \Leftrightarrow \overline{\Delta} \parallel \{[V] \wedge [H]\} \Leftrightarrow \begin{cases} y = const \\ z = const. \end{cases} \tag{3.8}$$



$$\begin{cases} \overline{a'b'}(\overline{\delta'}) \parallel \overline{0x} \parallel \overline{ab}(\overline{\delta}) \\ \overline{a'b'} = \overline{ab} = \overline{AB} \\ \overline{a'b'}(\overline{\delta'}) \perp \overline{0z} \\ \overline{ab}(\overline{\delta}) \perp \overline{0y} \\ \overline{\delta''} \equiv a'' \equiv b'' \equiv l'' \equiv L \end{cases}$$

Fig. 3.8

Pe lângă proprietăţile amintite, dreptele particulare din ambele categorii mai au o proprietate foarte importantă: proiecţiile lor care pun în evidenţă adevărate mărimi de segmente şi unghiuri, redau în adevărată mărime şi perpendicularitatea oricăror drepte faţă de ele. In general, perpendicularitatea a două drepte oarecare, se deformează prin proiecţie. Dreptele particulare sunt deci capabile să evidenţieze această relaţie, nedeformând-o.

3.3 POZIŢIA RELATIVĂ A DOUĂ DREPTE

In spaţiu, două drepte se pot găsi în trei categorii de relaţii reciproce, definite prin proprietăţi şi caracteristici specifice, ce le diferenţiază în mod categoric:

- **drepte paralele;**
- **drepte concurente;**
- **drepte disjuncte.**

3.3.1 Dreptele paralele au proiecțiile de acelaşi nume paralele între ele (fig. 3.9-a). Această relație trebuie verificată în toate trei proiecțiile, altfel se pot face confuzii.

$$\overline{D} \parallel \overline{\Delta} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{d} \parallel \overline{\delta} \\ \overline{d'} \parallel \overline{\delta'} \\ \overline{d''} \parallel \overline{\delta''} \end{cases} \tag{3.9}$$

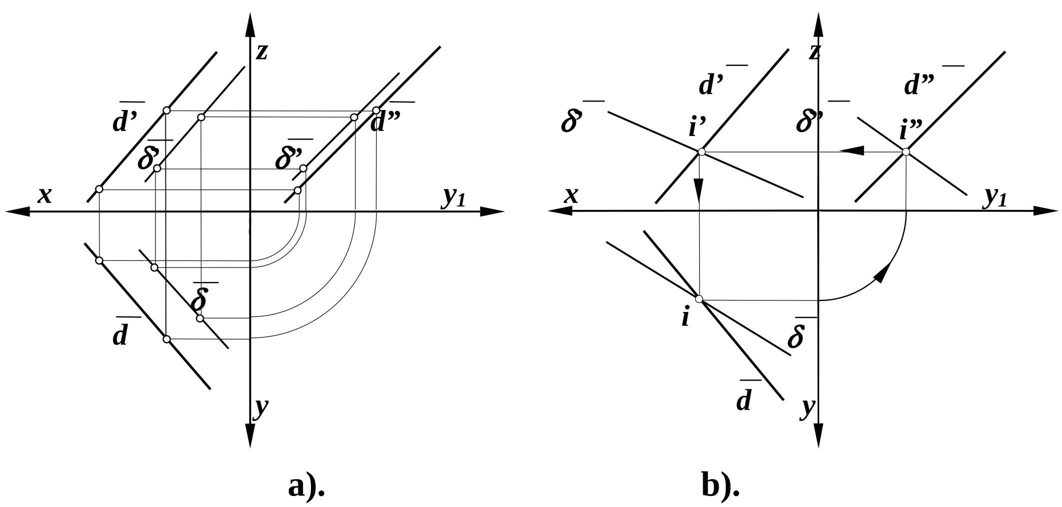


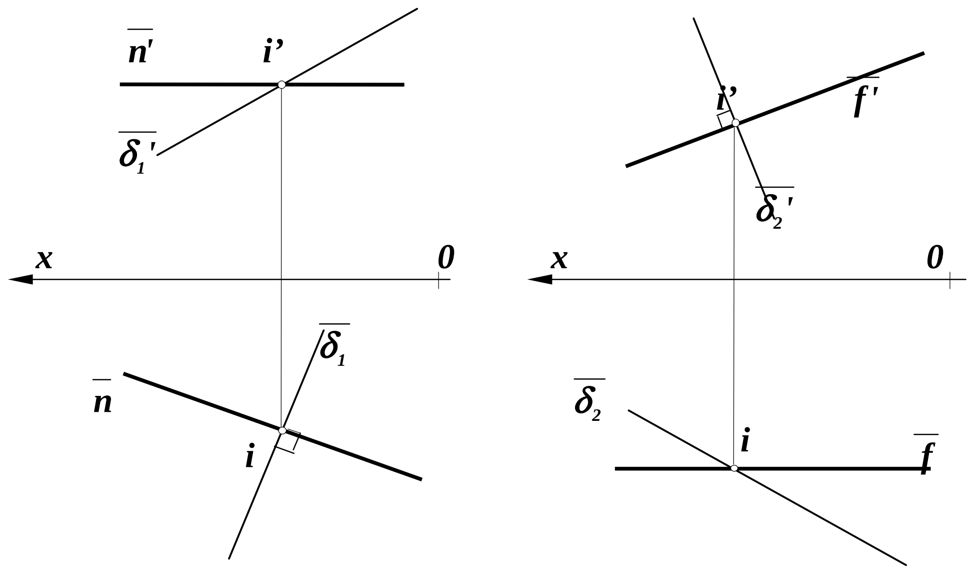
Fig. 3.9

3.3.2 Dreptele concurente au proiecțiile de acelaşi nume concurente pe aceeaşi linie de ordine (fig. 3.9-b):

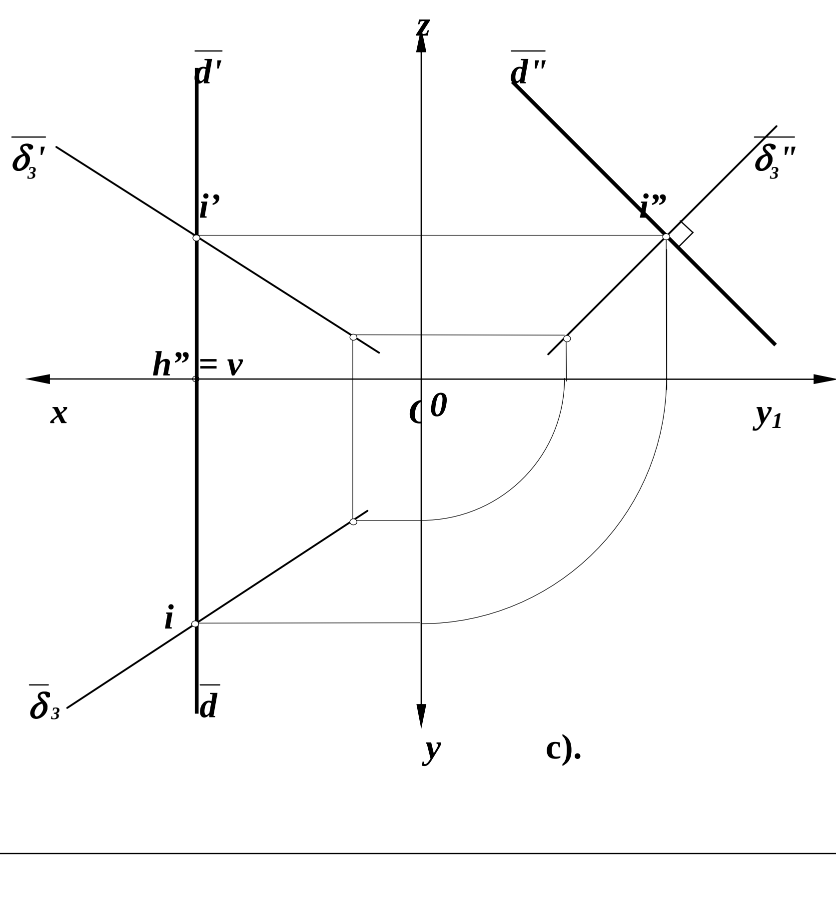
$$\overline{D} \cap \overline{\Delta} = I \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{d} \cap \overline{\delta} = i \\ \overline{d'} \cap \overline{\delta'} = i' \\ \overline{d''} \cap \overline{\delta''} = i'' \end{cases} \tag{3.10}$$

3.3.2.1 Drepte perpendiculare sunt un caz particular de drepte concurente. In general, două drepte perpendiculare nu apar ca atare în proiecții. Excepție fac cazurile în care una dintre drepte este paralelă cu unul dintre planele de proiecție (dreptele particulare § 3.2). Conform teoremei unghiului drept a două drepte , acesta se proiectează în adevărată mărime, pe planul de proiecție cu care dreapta particulară este paralelă şi unde se pun în evidență adevărate mărimi legate de acea dreaptă. Astfel:

- o dreaptă de nivel (fig. 3.10-a): $\overline{N} \perp \overline{\Delta_1} \Leftrightarrow \overline{n} \perp \overline{\delta_1}$; (3.11)
- o dreaptă de front (fig. 3.10-b): $\overline{F} \perp \overline{\Delta_2} \Leftrightarrow \overline{f'} \perp \overline{\delta_2'}$; (3.12)
- o dreaptă de profil (fig. 3.10-c): $\overline{D} \perp \overline{\Delta_3} \Leftrightarrow \overline{d''} \perp \overline{\delta_3''}$; (3.13)



a). b).



c).

Fig. 3.10

Dacă dreapta particulară face parte din categoria drepte perpendiculare pe un plan de proiecție (grad dublu de particularitate - fig. 3.6; 3.7; 3.8), atunci automat dreapta perpendiculară pe o astfel de dreaptă este la rândul ei particulară, iar perpendicularitatea se pune în evidență în două proiecții (cele ce evidențiază adevărate mărimi) şi anume:

- o dreaptă verticală $\overline{D_1} \perp \overline{\Delta_1} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\Delta_1} \equiv \textit{dreaptă de nivel} \ (\overline{N}) \\ \overline{d_1'} \perp \overline{\delta_1'} \\ \overline{d_1''} \perp \overline{\delta_1''} \end{cases}$ (3.14)

- o dreaptă de capăt $\overline{D_2} \perp \overline{\Delta_2} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\Delta_2} \equiv \textit{dreaptă de front} \ (\overline{F}) \\ \overline{d_2'} \perp \overline{\delta_2'} \\ \overline{d_2''} \perp \overline{\delta_2''} \end{cases}$ (3.15)

- o dreaptă fronto-orizontală $\overline{D_3} \perp \overline{\Delta_3} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\Delta_3} \equiv \textit{dreaptă de profil} \\ \overline{d_3'} \perp \overline{\delta_3'} \\ \overline{d_3''} \perp \overline{\delta_3''} \end{cases}$ (3.16)

3.3.3 Dreptele disjuncte nu sunt nici paralele, nici concurente. Aparent, ele par concurente, deoarece proiecțiile lor sunt concurente, dar proiecțiile punctului de “concurență” nu sunt situate pe aceeaşi linie de ordine, deci aceste proiecții sunt puncte duble (fig. 3.11). Legat de dreptele disjuncte, se poate stabili vizibilitatea acestor proiecții duble de forma $1 \equiv 2$, sau $3' \equiv 4'$:

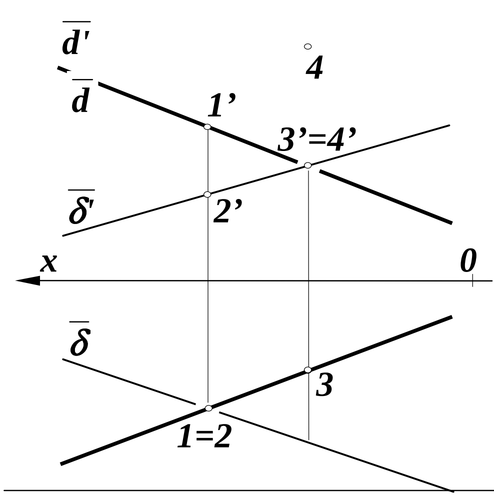


Fig. 3.11

Punctele (**1; 1’**) şi (**2; 2’**), sunt situate pe o dreaptă verticală. Va fi vizibil punctul (**1; 1’**) care are cotă mai mare $z_1 > z_2$, deci dreapta $\overline{D}$ are proiecția $\overline{d}$ deasupra proiecției $\overline{\delta}$ a dreptei $\overline{\Delta}$.

Similar, pentru punctele (***3; 3'***) şi (***4; 4'***), situate pe o dreaptă de capăt, va fi vizibil punctul (***4; 4'***), cu $y_4 > y_3$ deci proiecţia $\overline{\delta}'$ a dreptei $\overline{\Delta}$ este deasupra proiecţiei $\overline{d}'$ a dreptei $\overline{D}$.

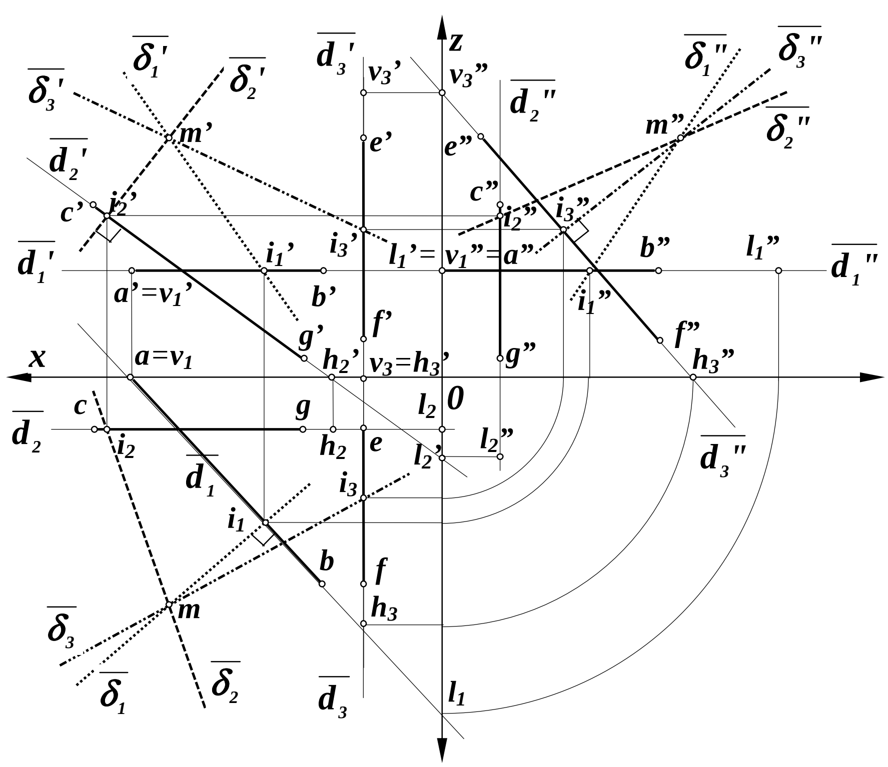
3.4 APLICAŢII

Exemplu rezolvat:

Se dau punctele: **A**(80; 0; 30), **B**(30; 55; 30), care determină dreapta $\overline{D_1}$; **C**(90; 15; 50), **G**(35; 15; 5), care determină dreapta $\overline{D_2}$; **E**(20; 10; 70), **F**(20; 55; 10), care determină dreapta $\overline{D_3}$ şi **M**(70; 60; 70). Se cer:

- urmele dreptelor: $\overline{D_1}$, $\overline{D_2}$, $\overline{D_3}$;
- Prin **M** să se traseze: $\overline{\Delta_1} \perp \overline{D_1}$; $\overline{\Delta_2} \perp \overline{D_2}$; $\overline{\Delta_3} \perp \overline{D_3}$;

Soluţie: proiecţiile dreptelor $\overline{D_1}$, $\overline{D_2}$, $\overline{D_3}$, se obţin unind proiecţiile de acelaşi nume ale punctelor de definiţie, iar urmele acestor drepte se găsesc la intersecţia lor cu planele de proiecţie (vezi fig. 3.1; 3.2; 3.3; 3.4; 3.5 şi relaţiile (3.1)). Se constată că $\overline{D_1}$ este dreaptă de nivel (***z=const.=30***), $\overline{D_2}$ este dreaptă de front (**y=const.=15**), iar $\overline{D_3}$ este dreaptă de profil (***x=const.=20***).



°

Fig. 3.12

Având în vedere aceste particularități, dreptele $\overline{\Delta_i}$ se vor construi prin punctul **M** (relațiile (3.2), fig. 3.2), mai întâi în proiecțiile în care perpendicularitatea este pusă în evidență de dreptele particulare $\overline{D_i}$ (relațiile (3.11), (3.12), (3.13) şi fig. 3.10-a,b,c). Pe principiul dreptelor concurente (fig. 3.9-b şi relațiile (3.10)), se construiesc şi celelalte proiecții, prin punctul **M şi** punctul de intersecție $\mathbf{I_i}$.

1. Să se construiască proiecțiile punctelor **M** şi **N** situate pe dreapta definită de punctele **A(**40; -10; 30**)** şi **B(**90; 30; 25**)**, ştiind că $\mathbf{x_M}$ = 90, iar $\mathbf{y_N}$ =10.

2. Să se determine urmele dreptei definite de punctele **A(**70; 30; 35**)** şi **B(**45; 15; 10**)**.

3. Fie punctele: **A**(35; 40; 20) şi **B**(70; 25; 30), care definesc dreapta $\overline{D}$ şi punctul **M**(80; 40; 10). Se cere:

- să se traseze proiecțiile dreptei $\overline{D}$;
- să se traseze prin **M** o dreaptă $\overline{\Delta_1} \| \overline{D}$;
- să se traseze prin **M** o dreaptă $\overline{\Delta_2}$ concurentă cu $\overline{D}$;

să se determine urmele celor trei drepte.

4. Fie punctul **M**(80; 30; 25). Să se construiască prin **M** următoarele drepte şi să se determine urmele lor:

- o dreaptă de nivel $\overline{N}$;
- o dreaptă de front $\overline{F}$;
- o dreaptă de profil $\overline{D}$;
- o dreaptă verticală $\overline{\Delta}$.

5. Se dau punctele: **A**(25; 10; 25), **B**(45; 55; 60) şi **C**(75; 15; 55). Să se construiască paralelogramul **[ABCD]**. Să se verifice că diagonalele paralelogramului sunt concurente şi se înjumătățesc. Să se stabilească vizibilitatea paralelogramului față de primul triedru.

6. Se dau punctele: **A**(10; 25; 40), **B**(35; 5; 10) şi **M**(70; 50; 40). Să se construiască rombul **[ABCD]**, având una dintre diagonale pe dreapta definită de punctele **A** şi **M**.

7. Să se determine centru cercului circumscris triunghiului **[ABC]**, ştiind că **A(**90; 60; 50**)**, **B(**25; 60; 10**)** şi **C(**60; 20; 10**)**.